

# 以木星的卫星运动演示开普勒第三定律

傅慎明 杜竞杉 朱逢源  
(杭州高级中学 浙江 杭州 310003)

**摘要:**介绍用普通设备观测木星的伽利略卫星来演示开普勒第三定律,并计算出中心天体——木星的质量,这一方法可以用作中学物理实验和中学生社团活动的内容。

**关键词:**开普勒第三定律 木星 观测

## 1 前言

我们使用家用数码相机拍摄木星时发现(图1),在得到木星的像同时也能得到4颗伽利略卫星的像。我们以此为契机,试图利用伽利略卫星围绕木星的运动来演示开普勒第三定律。

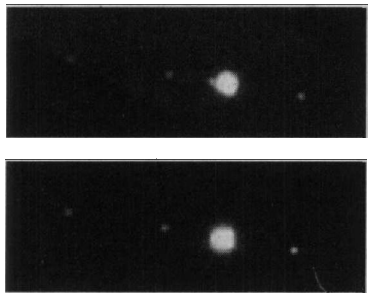


图1 使用家用数码相机拍摄的伽利略卫星

众所周知,开普勒定律揭示了行星绕日运行的规律,为牛顿发现万有引力定律铺平了道路。但开普勒三定律是开普勒耗费了近10年的巨大精力,才得以总结归纳的成果。

我们选用伽利略卫星绕木星的运动来演示开普勒第三定律有很多好的条件。木星和伽利略卫星都很亮,在城市里即使用家用数码相机也能清晰地拍摄到4颗卫星。伽利略卫星的偏心率很小,偏心率最大的只有0.01,完全可以当作圆轨道处理;其周期不长,木卫一的周期仅为1.8天,而最长的木卫四的周期也不过16.7天<sup>[1]</sup>。

短周期意味着在较短的时间内能采集到实验所需数据。由于地球和木星的运动在短时间内造成两者之间的距离变化也可以忽略不计,同时卫星相对轨道的倾角几乎为零,因此我们看到的木卫几乎就在一条直线上做往返运动。

在下面本文第二节,我们将描述观测的设备和过程,叙述测量过程并列出结果。第三节我们通过计算,得到符合开普勒定律的结果,实现了定理的演示;并且,利用万有引力定律,得到与目前文献中所列的木星质量相近的结果。在最后一节,给出了结论。

## 2 观测与测量

实验使用两种观测设备。首先使用家用相机 Nikon COOLPIX S10(VR)连续几日的拍摄来记录木卫三、木卫四的运行状况。相机数据与拍摄参数如下<sup>①</sup>。

彩色 CCD:  $\frac{1}{2.5}$  英寸(笔者注:这里 CCD 尺寸中的“英寸”并不代表 2.54 cm;由于历史导致的习惯性,该相机 CCD 对角线长应为  $\frac{1}{2.5} \times 16 \text{ mm} = 6.4 \text{ mm}$ )

总像素:6 180 000

图像尺寸:2 816 mm × 2 112 mm

镜头:NIKKOR 10X OPTICAL ZOOM 6.3 ~ 63 mm F3.5

数码变焦最大焦距:253.2 mm(拍摄时使用)

0.001 8 mm/像素,底片比例尺计算出 1.48 角秒每像素

ISO400, EV - 2.0, 露光时间 1 s

使用家用数码相机拍摄木星较简单,但要使用三角架支撑保证稳定。在表 1 中列出的是我们在 2009 年 11 和 12 月份间隔 28 天的观测结果。

注:①数据引自相机说明书,附加笔者的计算。

对于木卫一和木卫二,由于数码相机的焦距不够长,于是我们使用 Celestron CGEM - 800 施密特 - 卡赛格林式望远镜, QHY8 CCD 作为接收器记录几个小时内木卫一和木卫二的运行情况,可以得到更好的结果. 它们的数据与拍摄参数如下<sup>②</sup>.

Celestron CGEM - 800

口径:203 mm

焦比:F/10

底片比例尺计算出 0.79 角秒每像素

露光:5 s,增益:50%,offset:110

QHY8 CCD

感光面积大小:23.6 mm × 15.8 mm

有效像素:3 032 × 2 016

像元大小:7.8 μm × 7.8 μm

峰值量子效率:60%

由于木卫一、木卫二的周期分别只有 1.769 天和 3.551 天<sup>[3]</sup>,所以我们只需要一个晚上的观测资料.

获得图像之后,我们需要进行定量分析以获取时间和位移两个变量. 时间的记录可按照相机或计算机的 CPU 时间,而位移的测量却比较麻烦. 首先,

必须从图像上分清 4 颗伽利略卫星. 另外由于木星是一个视圆面,如何确定木星像的中心也是一个需要解决的难题,而木卫在图像上往往仅由几个像素点组成.

我们通过对天文年历<sup>[2]</sup>与 Skymap 软件,能很方便地辨别 4 颗卫星. 对于位移的测量主要采用了两种方法. 一是运用 Photoshop CS3 的标尺工具:通过木星像圆周上的 3 个点定义出圆心,再通过读出木卫的坐标求得木星中心与木卫之间以像素为单位的距离. 我们还通过编写 VB 小程序,提高测量效率. 二是运用软件 MaxIm DL 计算星像重心位置进行测量.

将各种输入的数据分类整理之后,得到了木星和木卫距离数据表,图 2、3 中我们给出了距离 - 时间图,所得到的正弦趋势较令人满意.

以下展示 2009 年 11 月份利用家用数码相机 Nikon COOLPIX S10(VR) 的拍摄数据. 我们只取离木星较远的木卫三和木卫四与木星(木星视圆面的中心)的距离(以像素为单位). 以图像中木卫在木星左为正,右为负. 结果在表 1 中给出,并作图 2. 由于木卫在一些图像中没有出现,有若干数据不存在.

表 1

日期	北京时间	与第一天观测的时间差 /day	木卫四 / 像素	木卫三 / 像素
11.09	18:02	0		-60.7
11.10	18:04	1.002	253.5	88.3
11.11	18:00	2.000	196.8	153.3
11.14	17:52	4.993	-27.9	-128.5
11.19	18:06	10.000	-222.6	126.8
11.20	18:18	11.011	-153.7	
11.24	18:01	14.999	215.0	45.3
11.25	18:01	15.999	255.4	139.1
11.27	18:59	18.040	240.9	38.4
11.28	18:45	19.030	175.1	-94.6
11.29	18:00	20.000	95.2	-152.2
11.30	17:58	20.997		-105.8
12.02	17:50	22.992	-60.1	127.4
12.05	18:13	26.008	-251.3	-66.8
12.06	18:00	27.000	-206.9	-114.1

注:②数据引自器材官方网站,附加笔者的计算

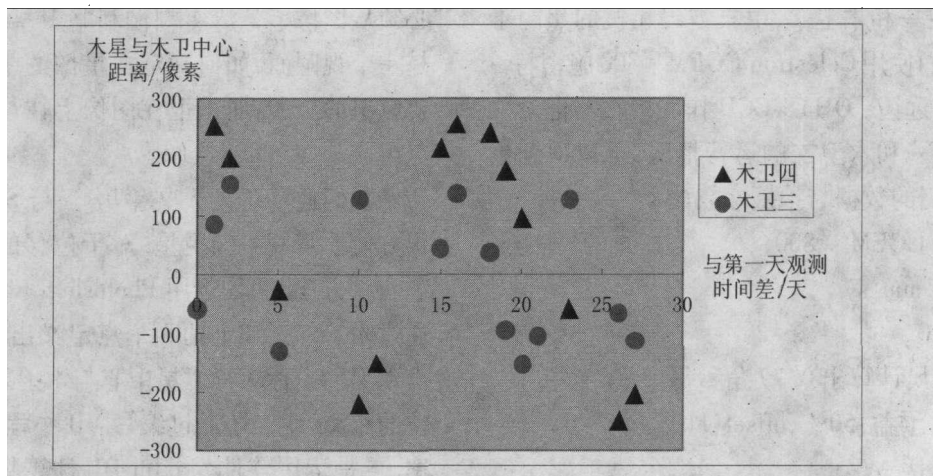


图2

表2为2009年10月22日,使用Celestron CGEM-800施密特-卡赛格林式望远镜为观测镜,QHY8 CCD获得的数据.并作图3.

表2

日期	北京时间	与第一天观测的时间差/day	木卫一/像素	木卫二/像素
10.22	17:56	0.747	140.0	193.0
	18:37	0.776	131.8	184.9
	19:11	0.799	123.4	178.4
	21:42	0.904	81.0	143.5
	22:15	0.927	69.7	134.9
	22:27	0.935	66.1	132.6

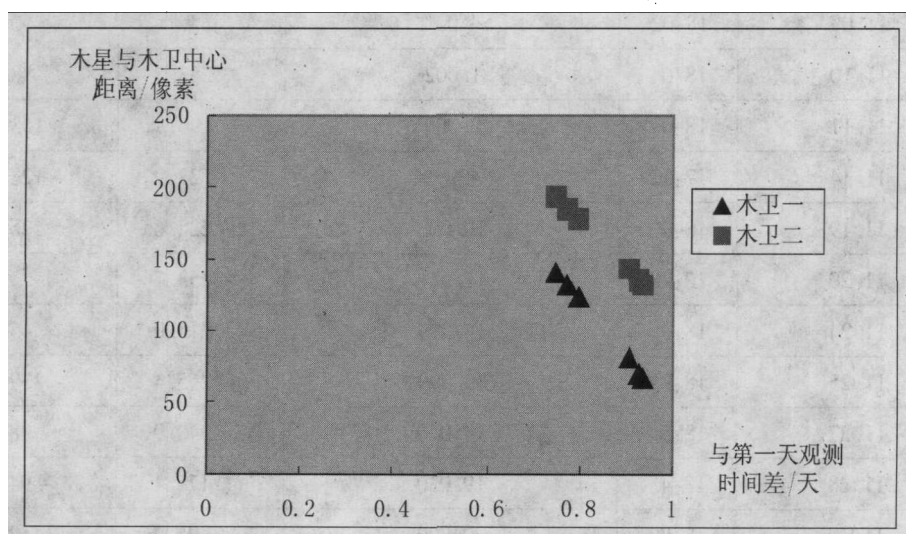


图3

### 3 分析计算

我们使用 Matlab 进行正弦曲线拟合. 将  $x$  与  $y$  的值制成矩阵输入,再用 cftool 拟合工具确定函数对应关系,拟合参考模型为

$$f(x) = a_1 \sin(b_1 x + c_1)$$

以下分别是上文所述两次数据的拟合曲线直输数据. 拟合的 R-square 均十分接近于 1, 因此可以说我们实验结果的拟合情况比较好.

图 4(a): 2008. 11. 9 ~ 12. 6

木卫四;

General model Sin1:

$$f(x) = a_1 \times \sin(b_1 \times x + c_1)$$

Coefficients (with 95% confidence bounds):

$$a_1 = 269.2 (265.6, 272.8)$$

$$b_1 = 0.3763 (0.3737, 0.379)$$

$$c_1 = 1.541 (1.494, 1.589)$$

Goodness of fit:

$$\text{SSE: } 49.26$$

$$\text{R - square: } 0.9999$$

$$\text{Adjusted R - square: } 0.9998$$

$$\text{RMSE: } 2.865$$

木卫三;

General model Sin1:

$$f(x) = a_1 \times \sin(b_1 \times x + c_1)$$

Coefficients (with 95% confidence bounds):

$$a_1 = 153.9 (148.2, 159.6)$$

$$b_1 = 0.872 (0.8578, 0.8861)$$

$$c_1 = -6.519 (-6.779, -6.258)$$

Goodness of fit:

$$\text{SSE: } 54.65$$

$$\text{R - square: } 0.9993$$

$$\text{Adjusted R - square: } 0.999$$

$$\text{RMSE: } 3.696$$

图 4(b); 2009.10.22

木卫一;

General model Sin1:

$$f(x) = a_1 \times \sin(b_1 \times x + c_1)$$

Coefficients (with 95% confidence bounds):

$$a_1 = 165 (152.7, 177.3)$$

$$b_1 = 3.199 (2.766, 3.631)$$

$$c_1 = 12.3 (11.87, 12.74)$$

Goodness of fit:

$$\text{SSE: } 0.2882$$

$$\text{R - square: } 0.9999$$

$$\text{Adjusted R - square: } 0.9999$$

$$\text{RMSE: } 0.3099$$

木卫二;

General model Sin1:

$$f(x) = a_1 \times \sin(b_1 \times x + c_1)$$

Coefficients (with 95% confidence bounds):

$$a_1 = 242.3 (199.6, 285)$$

$$b_1 = 1.828 (1.222, 2.435)$$

$$c_1 = 13.42 (12.74, 14.1)$$

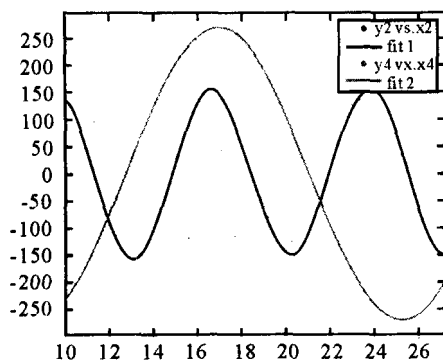
Goodness of fit:

$$\text{SSE: } 0.4174$$

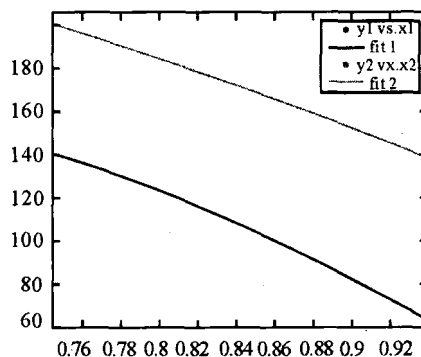
$$\text{R - square: } 0.9999$$

$$\text{Adjusted R - square: } 0.9998$$

$$\text{RMSE: } 0.373$$



(a) 木卫三、木卫四的拟合情况



(b) 木卫一、木卫二的拟合情况

图 4

得出拟合曲线之后,就可以根据拟合数据读出最大位移和计算周期,如表 3.

表3

日期	木卫三 $a$	$\omega/\text{day}$	木卫四 $a$	$\omega/\text{day}$
2008. 11. 12	153.9 像素 227. 772"	0. 872	269. 2 像素 398. 416"	0. 376
日期	木卫一 $a$	$\omega/\text{day}$	木卫二 $a$	$\omega/\text{day}$
2009. 10. 22	165.0 像素 130. 350"	3. 199	242. 3 像素 191. 417"	1. 828

分析木卫三与木卫四之间的关系可以得到

$$\text{木卫三} \quad k_3 = \frac{a^3}{T^2} \approx 69\,974$$

$$\text{木卫四} \quad k_4 = \frac{a^3}{T^2} \approx 70\,208$$

差值百分比

$$\frac{2(k^3 - k^4)}{k^3 + k^4} \times 100\% \approx 0.335\,1\%$$

分析木卫一与木卫二的关系可得

$$\text{木卫一} \quad k_3 = \frac{a^3}{T^2} \approx 1\,164\,449$$

$$\text{木卫二} \quad k_4 = \frac{a^3}{T^2} \approx 1\,204\,073$$

差值百分比

$$\frac{2(k_3 - k_4)}{k_3 + k_4} \times 100\% \approx 3.346\%$$

另外两次实验的差值百分比为2009年9月, 2.450%; 2009年10月, 2.824%。

我们可以看出, 最后实验数据的差值百分比都非常小; 也就是说, 半长轴  $a$  的三次方与周期  $T$  的二次方比值基本是一个常数, 这显示了开普勒第三定律的关系。

表4

计算参量	木卫四	木卫三
拟合半长轴 / 像素	269. 2	153. 9
拟合半长轴 / (")	398. 7	227. 9
拟合周期 / day	16. 7	7. 2
估算半长轴 / m	$1.7 \times 10^9$	$9.7 \times 10^8$
估算木星质量 / kg	$1.4 \times 10^{27}$	$1.4 \times 10^{27}$
计算参量	木卫一	木卫二
拟合半长轴 / 像素	165. 0	242. 3
拟合半长轴 / (")	130. 6	191. 8
拟合周期 / day	2. 0	3. 4
估算半长轴 / m	$4.6 \times 10^8$	$6.7 \times 10^8$
估算质量 / kg	$2.0 \times 10^{27}$	$2.0 \times 10^{27}$

根据获得的结果, 为了得到木星质量, 我们先利用木星冲日的时间估算任意时刻木地距离; 再通过底片比例尺来估算木星卫星轨道半长轴; 最后根据公式  $\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$ , 计算木星质量. 其结果如表4。

从文献[4]中得到的木星质量为  $1.9 \times 10^{27}$  kg. 从上述结果看无论使用家用数码相机还是利用望远镜得到的数据, 都和文献有相近的结果。

#### 4 结论

从上述讨论可以看出, 不同的器材, 可以得到不同精度的结果; 使用越精密的器材, 测量所得的数据也能更为精确。

综上所述, 无论普通的数码相机还是较专业的单反相机, 在采用一定的拍摄方法之后, 均能得到不错的影像记录. 对这些图像, 运用测量软件, 都可以得到我们所需的数据, 并拟合曲线. 在误差允许的情况下, 我们可以较好地演示开普勒第三定律, 并计算出木星质量. 当然, 在条件允许的情况下, 运用望远镜能得到更精确的结果。

通过这项实验, 我们不仅更加深刻地理解了开普勒第三定律和牛顿万有引力定律, 而且学会了一些天体测量和数据处理的方法. 这对高中生来说是一次非常好的实践活动。

(指导教师: 林岚)

#### 参考文献

- 胡中为, 王尔康. 行星科学总论. 南京: 南京大学出版社, 1998
- 天文爱好者杂志社. 2008年天文普及年历. 北京: 科学技术出版社, 2007. 12
- 天文爱好者杂志社. 2009年天文普及年历. 北京: 科学技术出版社, 2008. 12
- 刘学富主编. 基础天文学. 高等教育出版社, 北京: 2004. 7